

تحلیل حساسیت قیمت‌گذاری اختیار خریدهای اروپایی به روش درخت دو جمله‌ای

خدیجه حسنلو^۱، سیما مردانلو^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۴/۲۱

چکیده:

قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی فرمول شناخته شده‌ای در مدل کاکس-راس-راینستین دارد که وابسته به نوسانات پایه است. با این وجود، تخمین دقیق نوسانات مشکل است. اس-موزیولی و سی-توریسلی این مشکل را با استفاده از توزیع احتمالی کنترل می‌کنند. در این مقاله، تعدادی از اشتباهات موجود در کار آنها را اصلاح کرده و یک راه حل جایگزین برای این مسئله با انجام تحلیل حساسیت قیمت‌گذاری اختیار معامله ارائه می‌دهیم. این روش، مفهومی کلی دارد که می‌توان آن را با توصیف عدم قطعیت نوسانات با بازه‌های مطمئن همانند توصیف آن با اعداد فازی به کار گرفت.

واژگان کلیدی: قیمت‌گذاری اختیار معامله، تحلیل حساسیت، مدل درخت دو جمله‌ای.

طبقه‌بندی JEL: G13.

۱. دکترای مهندسی صنایع، استادیار، عضو هیأت علمی مؤسسه آموزش عالی خاتم، (نویسنده مسئول)، kh_hassanlou@iust.ac.ir.

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، مؤسسه آموزش عالی رجاء، s_mardanlu@yahoo.com.

۱. مقدمه

اختیار معامله، قراردادی بین دو گروه - یک خریدار و یک فروشنده - است به نحوی که خریدار اختیار معامله از فروشنده، "حق" خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین خریداری می‌کند. در اینجا نیز همانند تمام قراردادهای هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطاء می‌کند. خریدار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد. فروشنده نیز "حق" خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطاء می‌نماید. مزایای قراردادهای اختیار معامله عبارتند از:

۱. اهرم مالی: قراردادهای اختیار معامله این فرصت را برای سرمایه‌گذاران فراهم می‌کند که یک وضعیت را با پول بسیار کمتری مدیریت کنند. با سرمایه‌گذاری در قراردادهای اختیار معامله، یک سرمایه‌گذار نسبت به حالت سرمایه‌گذاری مستقیم در دارایی پایه، پول کمتری نیاز خواهد داشت.

۲. کاهش ریسک: با خرید قرارداد اختیار معامله یک دارایی پایه به جای خود دارایی پایه، در حقیقت ریسک بالقوه سرمایه‌گذاری کاهش می‌یابد و زیان معامله محدود به هزینه‌ای است که برای خرید اختیار معامله پرداخت می‌شود. در واقع از قراردادهای اختیار معامله به عنوان ابزاری برای پوشش ریسک استفاده می‌شود که به سرمایه‌گذاران اجازه می‌دهد خود را در مقابل نوسانات نامطلوب قیمت محافظت کنند.

۳. کسب درآمد: سرمایه‌گذار می‌تواند با فروش قرارداد اختیار معامله سهام، درآمد خود از سهام را تنها به منفعت سرمایه‌ای و سود تقسیمی محدود نکند. فروش اختیار معامله سهام متعلق به سرمایه‌گذار یا سهامی که قصد خرید آن را دارد، یکی از ساده‌ترین و سودآورترین راهبردهای معاملاتی است.

۴. کسب سود از نوسان قیمت سهم: با استفاده از اختیار معامله، شخص می‌تواند بدون در اختیار داشتن سهم پایه، از نوسان قیمت آن منتفع شود. بدین منظور دو سناریوی مختلف را می‌توان در نظر گرفت:

الف. خرید اختیار خرید در بازارهای صعودی

ب. خرید اختیار فروش در بازارهای نزولی

۵. خرید زمان مناسب برای تصمیمات خرید یا فروش: معامله قراردادهای اختیار معامله به سرمایه‌گذار امکان می‌دهد با پرداخت درصدی از قیمت سهم، جریان نقدی خرید یا فروش خود را ثابت کند و در زمان باقی‌مانده تا سررسید، تصمیم مناسب را اتخاذ نماید.

۶. متنوع سازی: وجود اختیار معامله در سبد سرمایه‌گذاری با سرمایه اولیه اندک، امکان تنوع‌سازی مناسب سبد را به سرمایه‌گذار می‌دهد. (<http://www.bmibourse.com/۱۶۸>)

دو روش مهم قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله عبارتند از روش درخت دوجمله‌ای و روش قیمت‌گذاری بلک-شولز^۱. تحلیل حساسیت مدل‌ها نشان می‌دهد که مدل بلک-شولز مدلی مناسب جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های با نوسانات پایین و مدل درخت دوتایی مدلی مناسب جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله‌های با نوسانات بالا می‌باشد. زیبایی قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار معامله به روش درخت دوجمله‌ای در سادگی آن می‌باشد. در این روش دیگر نیازی به معادلات تفاضلی و محاسبات پیچیده ریاضی نمی‌باشد. هدف این روش خلق یک پورتفو با به کارگیری ترکیبی از وام‌گیری با نرخ بهره بدون ریسک و خرید دارایی پایه می‌باشد که هر دوی آنها جریان نقدی مشابهی ایجاد نمایند و با استفاده از آن می‌توان قیمت اختیار خرید را تعیین نمود. (کیمیاگری، ۱۳۸۷: ج ۱۹ (۴)، صص ۱۱۹-۱۲۷)

در بخش اول این مقاله، به بررسی پیشینه قیمت‌گذاری اختیار خرید پرداخته، مدل قیمت‌گذاری کاکس-راس-رایبستین^۲ و مفروضات آن را معرفی می‌کنیم. فرمول معروف قیمت اختیار معامله به نوسانات پایه وابسته است. اس-موزیولی و سی-توریسلی^۳ این مشکل را با استفاده از توزیع احتمالی کنترل می‌کنند. در بخش دوم مقاله، تعدادی از اشتباهات موجود در کار آنها را اصلاح کرده و یک راه حل جایگزین برای این مسئله با انجام تحلیل حساسیت قیمت‌گذاری اختیار معامله ارائه می‌دهیم. این روش، مفهومی کلی دارد که می‌توان آن را با توصیف عدم قطعیت نوسانات با بازه‌های مطمئن همانند توصیف آن با اعداد فازی به کار گرفت. درواقع در هر دو روش، ابهام در نوسانات موجب ابهام در فاکتورهای بالایی و پایینی می‌شود. این فاکتورها با یک مقدار فازی مدل‌سازی می‌شوند که به یک فاصله اطمینان تعلق دارند.

1. F. Black and M. Scholes.

2. Cox, Ross, Rubinstein.

3. S. Muzzioli and C. Torricelli.

ما حالتی را فرض می‌کنیم که در آن فاکتور پایینی عکس فاکتور بالایی است. طول عمر اختیار معامله به N گام به طول T/N تقسیم می‌شود. حال نیاز داریم که رفتار قیمت اختیار معامله را به عنوان تابعی از فاکتور بالایی در یک بازه مطالعه کنیم که زیرمجموعه‌ای از $[(1+r)^{T/N}, +\infty)$ است که در آن r نرخ بهره بدون ریسک است. بنابراین ما رفتار تابعی قیمت اختیار معامله را برای تمام مقادیر ممکن فاکتور بالایی مطالعه می‌کنیم. نهایتاً، مدل را با یک مثال با فاکتور بالایی فازی نشان می‌دهیم.

۲. پیشینه پژوهش

ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مباحث گسترده‌ای است که در ادبیات مالی مطرح شده است. این مبحث که به نظریه قیمت‌گذاری اختیار معامله مشهور است، متخصصان زیادی را به خود جلب کرده است که از بین آنها فیشر بلک و میرن شولز شناخته شده تر هستند. این دو، مدلی را ارائه کردند که حالت کلی داشته و تحت مفروضات خاص خود قیمت اختیار معامله را به دست می‌دهد. قبل از این دو بسیاری از اقتصاد دانان تلاش کردند تا این مسئله را به نوعی حل کنند. هر چند که بنا بر معیارهای موجود برخی از این تلاش ناقص جلوه می‌کند، ولی می‌باید تأکید کرد که پیشرفت‌های فعلی بدون اتکاء بر تلاش‌های اولیه غیرممکن می‌بود. در اینجا، فقط به ذکر اسامی برخی از این افراد و نکات برجسته کار آنها اشاره می‌کنیم.

احتمالاً اولین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط لوئیس باچلیر^۱ در سال ۱۹۰۰ میلادی ارائه شده است؛ وی در هنگام بررسی نوسانات قیمت سهام به برخی جنبه‌های ریاضی تئوری حرکت براونی قیمت سهام دست یافت. مدل ارائه شده توسط باچلیر با گذشت بیش از پنجاه سال مجدداً توسط کروایزنکا^۲ در سال ۱۹۵۶ مطرح گردید. نکته قابل توجه آنکه، برای نیم و یا بیش از نیم قرن اکثر پیشرفت‌های به دست آمده در خصوص قیمت‌گذاری اختیار معامله، مدل‌های اقتصاد سنجی موردی بودند. مدل ارائه شده توسط اسپرنکل^۳ در ۱۹۶۱، بونس^۴ در ۱۹۶۴، ساموئل سون^۵ در ۱۹۶۵ و کاسوف^۶ در ۱۹۶۹ نمونه‌ای از این مدل‌ها هستند.

1. Lois Bachelier.
2. Kruizenga.
3. Sprengle.
4. Boness.
5. Samuelson.
- 6 Kassouf.

بالاخره در سال ۱۹۷۳ بلک و شولز با فرض اینکه قیمت سهام به جای استفاده از فرآیند دو جمله‌ای از فرایند حرکت براونی هندسی تبعیت می‌نماید، مدل خود را ارائه دادند. (بلک و شولز، ۱۹۷۳: صص ۶۳۷-۶۵۹) این مدل شباهت زیادی به مدل ارائه شده توسط ساموئل سون و بونس دارد. این دو از فرض ارزش‌گذاری تحت شرایط بی‌تفاوت نسبت به ریسک استفاده نمودند؛ این فرض بعداً توسط کاکس و راس به طور توأم و مرتون^۱ سال ۱۹۷۶ تشریح گردید. روش درخت دو جمله‌ای یکی از روش‌های بسیار معروف و پرکاربرد در بحث قیمت‌گذاری اختیار معامله می‌باشد. این روش فرض می‌شود که حرکت‌های قیمت سهم در فاصله‌های زمانی کوتاه مدت، به صورت دو شاخه‌ای می‌باشد. این فرضیه که اساس و زیربنای بسیاری از روش‌های کمی است، اولین بار توسط کاکس، راس و رابینستین مطرح گردید. (کاکس، راس و رابینستین، ۱۹۷۹: ش ۸۱، صص ۲۲۹-۲۶۳)

اس-موزیولی و سی-توریسلی در مقاله خود با عنوان "یک مدل دو جمله‌ای چند دوره-ای قیمت‌گذاری اختیار معاملات در دنیای غیر قطعی" بیان می‌دارند:

روش‌های متفاوتی برای تخمین نوسانات، چه از داده‌های تاریخی و چه از قیمت‌های اختیار معامله وجود دارند. گاهی یک تخمین دقیق از نوسانات دارایی پایه مشکل است و ممکن است گرفتن مقادیر بازه‌ای مطمئن‌تر باشد. به علاوه، ممکن است حالتی باشد که همه اعضای یک بازه، قابلیت اطمینان یکسانی نداشته باشند، به طوری که امکان عضوهای میانی بیشتر از عضوهای نزدیک مرز بازه باشند. این دقیقاً ایده‌ای است که پشت مدل ماست. اما به جای مدل‌سازی نوسانات به عنوان یک مقدار فازی، ما پرش‌های بالا و پایین قیمت سهام را مستقیماً مدل‌سازی کردیم. (موزیولی و توریسلی، ۲۰۰۱: صص ۲۵۵-۲۶۴)

به جای مدل‌سازی نوسانات به عنوان یک مقدار فازی، اس-موزیولی و سی-توریسلی فاکتورهای بالایی و پایینی u و d را مستقیماً به عنوان اعداد فازی (u_1, u_2, u_3) و (d_1, d_2, d_3) مدل‌سازی کردند. آنها یک مدل درخت دو جمله‌ای با یک دوره $T=N=1$ را فرض کردند که آنها را به حل دستگاه معادلات زیر می‌رساند:

$$\begin{cases} (P_u)_1(\alpha) = 1 - (P_d)_\tau(\alpha) \\ (P_u)_\tau(\alpha) = 1 - (P_d)_1(\alpha) \\ d_1(\alpha)(P_d)_1(\alpha) + u_1(\alpha)(P_u)_\tau(\alpha) = 1 + r \\ d_\tau(\alpha)(P_d)_\tau(\alpha) + u_\tau(\alpha)(P_u)_1(\alpha) = 1 + r \end{cases}$$

1. Merton.

که P_u و P_d احتمال فازی بالایی و پایینی $((P_u)_1, (P_u)_2, (P_u)_3)$ و $((P_d)_1, (P_d)_2, (P_d)_3)$ هستند. جواب صحیح با بسط دستگاه معادلات (۲) به حالت مقادیر فازی و به خاطر سپردن این نکته که عملگرها، عملگرهای دو جمله‌ای بر روی اعداد فازی هستند، بدست می‌آید. (کره، ۱۹۹۸:

(۲۵۴)

$$\begin{cases} P_u = (1, 1, 1) - P_d \\ dP_d + uP_u = (1 + r, 1 + r, 1 + r) \end{cases}$$

در α برش منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$\begin{cases} [(P_u)_1(\alpha), (P_u)_r(\alpha)] = [1, 1] - [(P_d)_1(\alpha), (P_d)_r(\alpha)] \\ [d_1(\alpha), d_r(\alpha)][(P_d)_1(\alpha), (P_d)_r(\alpha)] + [u_1(\alpha), u_r(\alpha)][(P_u)_1(\alpha), (P_u)_r(\alpha)] \\ = [1 + r, 1 + r] \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} (P_u)_1(\alpha) = 1 - (P_d)_r(\alpha) \\ (P_u)_r(\alpha) = 1 - (P_d)_1(\alpha) \\ d_1(\alpha)(P_d)_1(\alpha) + u_1(\alpha)(P_u)_r(\alpha) = 1 + r \\ d_r(\alpha)(P_d)_r(\alpha) + u_r(\alpha)(P_u)_1(\alpha) = 1 + r \end{cases}$$

جواب صحیح این دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} (P_u)_1(\alpha) = \frac{d_1(\alpha)(d_r(\alpha) + u_r(\alpha)) - (1 + r)(d_1(\alpha) + u_r(\alpha))}{d_1(\alpha)d_r(\alpha) - u_1(\alpha)u_r(\alpha)} \\ (P_u)_r(\alpha) = \frac{d_r(\alpha)(d_1(\alpha) + u_1(\alpha)) - (1 + r)(d_r(\alpha) + u_1(\alpha))}{d_1(\alpha)d_r(\alpha) - u_1(\alpha)u_r(\alpha)} \\ (P_d)_1(\alpha) = \frac{(1 + r)(d_r(\alpha) + u_1(\alpha)) - u_1(\alpha)(d_r(\alpha) + u_r(\alpha))}{d_1(\alpha)d_r(\alpha) - u_1(\alpha)u_r(\alpha)} \\ (P_d)_r(\alpha) = \frac{(1 + r)(d_1(\alpha) + u_r(\alpha)) - u_r(\alpha)(d_1(\alpha) + u_1(\alpha))}{d_1(\alpha)d_r(\alpha) - u_1(\alpha)u_r(\alpha)} \end{cases}$$

پس از آن اس-موزیولی و سی-توریسلی قیمت اختیار معاملات را در مدل یک مرحله‌ای محاسبه کردند. آنها فرض کردند که قیمت اعمال بین بالاترین ارزش دارایی پایه در حالت پایین و پایین ترین ارزش دارایی پایه در حالت بالاست:

$$S, d_r \leq K \leq S, u_1$$

در این حالت محاسبات بسیار آسان است. هدف گام بعدی آنها، بسط متدولوژی قیمت‌گذاری به یک مدل دو مرحله‌ای و پس از آن مدل چند مرحله‌ای درخت دو جمله‌ای است. معادله بالا به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$S, d_+^{j+1} u_+^{N-j-1} \leq K \leq S, d_+^j u_+^{N-j} \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

که غیر ممکن است؛ از آنجایی که K نمی‌تواند عضوی از N بازه باشد. حتی اگر شرایط به قرار زیر تغییر داده شوند:

$$\exists j \in \{0, 1, \dots, N-1\}: S, d_+^{j+1} u_+^{N-j-1} \leq K \leq S, d_+^j u_+^{N-j}$$

این شرایط همیشه برقرار نمی‌شود؛ زیرا به سادگی می‌توان اثبات کرد $S, d_+^{j+1} u_+^{N-j-1}$ همواره کوچکتر از $S, d_+^j u_+^{N-j}$ نیست. (برای مثال در حالت $d = \frac{1}{u}$ حتی اگر این حالت وجود داشته باشد، هیچ توجیه اقتصادی‌ای وجود ندارد که قیمت اعمال خارج از محدوده مشخص شده نباشد.

نهایتاً آنها قیمت اختیار معامله را در یک حالت خاص از مدل دو مرحله‌ای محاسبه کردند و خاطرنشان کردند که بسط دادن آنها به N مرحله به طور مستقیم است چیزی که حالتی نیست که در ادامه می‌بینیم.

تاکید آخر بر تعداد مرحله‌ها است. به جای تقسیم طول عمر T به N زیر دوره، تعداد مرحله‌ها بسط داده می‌شود که بدان معناست که در هرگام یک انتخاب دیگر در نظر گرفته می‌شود. اگر با این راه پیش برویم، این مشکل مهم محدودیت نمی‌تواند در نظر گرفته شود. (رینارتز و وانمائل، ۲۰۰۳)

۳. روش پژوهش

رویه‌های ریاضی و مدل‌های مبتنی بر هوش مصنوعی از روش‌های پیشرفته ارزش‌گذاری اوراق اختیار معامله به شمار می‌روند. رویه‌های ریاضی نیز خود به سه دسته اصلی شبیه‌سازی مونت کارلو^۱، روش‌های درختی^۲ و روش‌های دیفرانسیلی^۳ دسته‌بندی می‌شوند.

1. Monte Carlo Simulation.
2. Trees Methods.
3. Difference Methods.

مسئله اصلی در کاربردهای تجربی این است که در اکثر مواقع فرض می‌شود جزء تصادفی دارای توزیع نرمال است و همبستگی بین پیشامدها صفر است. همین امر باعث شده است برخی از محققان (مثل لولن و لانگ^۱، ۱۹۷۲) بیان کنند که شبیه‌سازی‌های گروه مونت کارلو در ایجاد اطلاعات مرتبط با مبحث، ناتوان هستند. از طرف دیگر، سایر منتقدان، نیاز این روش‌ها به یک مدل تحلیلی ریاضی را دلیل ضعف آن می‌دانند و از پیچیده و وقت‌گیر بودن آن انتقاد دارند. زیرا اعتقاد دارند بهره‌ای که با استفاده از این روش به دست می‌آید (در مقایسه با سایر روش‌ها) نسبت به هزینه‌های انجام آن کم است و در واقع صرف نمی‌کند. فیلیپتاتوس^۲ در سال ۱۹۷۳ و می‌یرز^۳ در سال ۱۹۷۶ و روبین اشتین^۴ در سال ۱۹۸۱، مجموعه‌ای از مرزهای تشخیص را معرفی کردند که در تصمیم‌گیری پیرامون مناسب یا نامناسب بودن استفاده از گروه مونت کارلو، راه‌گشاست. مطابق نظر وی استفاده از این روش‌ها در صورت وجود شرایط زیر مجاز و مفید است:

۱. دستیابی و جمع‌آوری داده‌ها غیر ممکن و گران باشد.
۲. سازمانه مشاهده شده بسیار پیچیده باشد.
۳. راه‌حل‌های تحلیلی را به راحتی نتوان به دست آورد.
۴. اثبات و کشف یک یافته ریاضی مربوط به حل مسئله مشکل، غیرممکن یا هزینه بر باشد.

مطالعه ریس و ساتکلیف^۵ در سال ۱۹۹۳ نیز یک بار دیگر بر موارد فوق تاکید کرد و خاطر نشان ساخت که اگر هیچ ابزار دیگری به کار نیاید این روش بسیار مفید خواهد بود. از مواردی که کار با گروه مونت کارلو را دشوار می‌گرداند، این است که در اغلب موارد، ارتباط درونی‌ای که به طور طبیعی بین دو یا چند متغیر وجود دارد، بسیار پیچیده و در نتیجه تعیین ارتباط دقیق و توزیع درست متغیرها مشکل است. بنابراین محققانی که می‌خواهند با این ابزار کار کنند، بسیار دشواری دارد. زیرا از طرفی نیازمند دقت فراوان برای گریز از ساده‌انگاری و افتادن در دام اشتباه‌های ناشی از آن است و از طرفی دیگر، هم‌سو ساختن ویژگی‌های

-
1. Lewellen and M.S. long.
 2. Philipptos.
 3. Myers.
 4. Rubinstein.
 5. Rees and Sutcliffe.

شبیه‌سازی، به طوری که بر تمام پیچیدگی‌ها فایق آید، سخت می‌باشد. این دشواری‌ها با اضافه شدن واقعیت‌هایی نظیر امکان وجود همبستگی‌های غیرخطی بین متغیرها (که در بازار سهام و ارز قابل مشاهده است) و متغیرهایی که در طول زمان ویژگی‌های توزیع احتمال آنها عوض می‌شود، بیش از پیش می‌شود.

در این مقاله، بحث در مورد روش‌های مبتنی بر هوش مصنوعی دیفرانسیلی و مونت کارلو را - به دلیل پیچیدگی‌های خاص خود، نبود امکانات مربوطه در کشور و عدم انتشار اوراق اختیار معامله در کشور - کنار گذاشته و روش درختی را به جهت سهولت و نسبی بودن برای سایر روش‌ها تشریح می‌کنیم.

روش درخت دو جمله‌ای یکی از روش‌های بسیار معروف و پرکاربرد در بحث قیمت‌گذاری اختیار معامله می‌باشد. این روش شامل رسم درخت دو جمله‌ای می‌باشد که این درخت‌ها مسیر حرکت قیمت سهم و همچنین قیمت اختیار معامله را در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد. درخت دوجمله‌ای را می‌توان با گام‌های مختلف رسم کرد. در یک بازه زمانی ثابت (T) هرچه تعداد گام‌ها بیشتر باشند، درخت، مسیرها و حالت‌های بیشتری را بررسی می‌کند و دقت محاسبات بیشتر می‌شود. (کیمیاگری، ۱۳۸۷: ج ۱۹ (۴)، ص ۱۱۹-۱۲۷)

مدل درخت دو جمله‌ای را می‌توان یک حالت زمان گسسته از مدل بلک شولز با مفروضات زیر در نظر گرفت:

- بازار هیچ هزینه معامله، مالیات و محدودیت فروش ندارد و داراییها تا بی‌نهایت قابل تقسیم‌اند.
 - T طول عمر اختیار معامله به N گام به طول T/N تقسیم شده است.
 - بازار کامل است.
 - هیچ فرصت آربیتراژگری مجاز نیست. که حاکی از آن است که $d < (1+r)^{\frac{T}{N}} < u$ که r نرخ بهره بدون ریسک، d فاکتور پایینی و u فاکتور بالایی است. (سیاح و صالح آبادی، ۱۳۸۸)
- قیمت اختیار خرید اروپایی فرمول شناخته شده‌ای در مدل درخت دو جمله‌ای کاکس-راس - رابینستین (کاکس، راس و رابینستین، ۱۹۷۹: ش ۸۱، صص ۲۲۹-۲۶۳) دارد:

$$EC(K, T) = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} p_u^j (1-p_u)^{N-j} (S_0 u^j d^{N-j} - K) \quad (1)$$

که در آن K قیمت اعمال، S_T قیمت دارایی پایه در زمان T ، σ نوسانات پایه، P_u احتمال بی تفاوت نسبت به ریسک بالارفتن قیمت با فاکتور $u = \exp(\sigma \sqrt{\frac{T}{N}})$ و P_d احتمال بی تفاوت نسبت به ریسک پایین آمدن قیمت با فاکتور d است. فرض می‌کنیم $d = \frac{1}{u}$ می‌دانیم که P_u و P_d جواب‌های معادلات زیر هستند:

$$\begin{cases} P_u + P_d = 1 \\ d P_u + u P_d = (1+r)^{\frac{T}{N}} \end{cases} \quad (2)$$

این جواب‌ها عبارتند از:

$$P_u = \frac{(1+r)^{\frac{T}{N}} - d}{u - d} = \frac{(1+r)^{\frac{T}{N}} u - 1}{u^2 - 1} \quad (3)$$

$$P_d = \frac{u - (1+r)^{\frac{T}{N}}}{u - d} = \frac{u^2 - (1+r)^{\frac{T}{N}} u}{u^2 - 1} \quad (4)$$

نوسانات موثر و قیمت‌گذاری یک اختیار خرید اروپایی

مدل‌های سنتی قیمت‌گذاری اختیار معاملات، بازده مورد انتظار اختیار معامله را بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت در ارتباط با قیمت دارایی پایه در سررسید، تعیین می‌کنند. نظریه مجموعه‌های فازی می‌تواند به صراحت برای چنین عدم قطعیتی مورد استفاده قرار گیرد. (تاوانسواران و آپادو و فرائک، ۲۰۱۳: ش ۲۶، صص ۶۵-۲۷)

انگیزه اصلی در استفاده از اعداد فازی در امور مالی، در نیاز برای مدل‌سازی عدم قطعیت و ابهام نهفته است که در بسیاری از شرایط ضمنی هستند. با این حال، روش فازی نه به عنوان یک جایگزین برای روش احتمالی، بلکه به عنوان یک روش مکمل برای توصیف خصوصیات مدل در نظر گرفته شده است. (گوئرا و سورینی و استفانینی، ۲۰۱۱: صص ۵۱۵-۵۲۶)

همانطور که گفتیم، معمولاً تخمین دقیق نوسانات سخت است. این مشکل می‌تواند با بازه‌های مطمئن نوسانات و یا با مدل‌سازی نوسانات با مقادیر فازی رفع شود. در واقع یک مقدار فازی کاملاً با برش‌های α آن تعیین می‌شود. بازه‌های $[a_1(\alpha), a_r(\alpha)]$ را در نظر بگیرید که:

$$\alpha_1 \leq \alpha_r: [a_1(\alpha_1), a_r(\alpha_1)] \subseteq [a_1(\alpha_r), a_r(\alpha_r)]$$

بنابراین بازه‌های $[a_1(\alpha), a_r(\alpha)]$ برش‌های α ی مقادیر فازی a هستند،

$$a(x) = \sup_{a \in [\cdot, 1]} \min\{a, \mathbb{1}_{[a_1(a), a_r(a)]}(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

نوسانات موثر، تاثیر روی فاکتورهای بالایی (و پایینی) را نشان می‌دهند. تحت مفروضات بخش قبل، بازه‌های مطمئن یا برش‌های α که u_λ فاکتور بالایی، متعلق به مجموعه $[(1+r)^{T/N}, +\infty[$ است. بنابراین ما رفتارهای قیمت اختیار خرید اروپایی را برای تمام مقادیر ممکن u_λ مطالعه می‌کنیم. در بخش‌های بعد نیاز داریم که حالت مرزی $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ را نیز به حساب آوریم:

$$u_\lambda = (1+r)^{\frac{T}{N}} + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$$

با در نظر گرفتن معادله (۳)، احتمال بدون ریسک p_λ که قیمت بالا رود، برابر است با:

$$p_\lambda = \frac{(1+r)^{\frac{T}{N}} u_\lambda - 1}{u_\lambda^T - 1}$$

$C(K)$ ، قیمت اختیار معامله برابر است با:

$$\begin{aligned} C_\lambda(K) &= \frac{1}{(1+r)^T} E[(S_\lambda^T - K)_+] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=1}^N (S_\lambda u_\lambda^{Tj-N} - K)_+ P[X_\lambda^N = j] \\ &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=j_\lambda^*}^N (S_\lambda u_\lambda^{Tj-N} - K) \binom{N}{j} p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j} \end{aligned} \quad (5)$$

که X_λ^N تعداد بالارفتن‌ها در طول عمر T و $S_\lambda u_\lambda^{Tj-N} - K$ به ازای $j \geq j_\lambda^*$ مثبت است. یک بازه مطمئن $[(1+r)^{\frac{T}{N}}, +\infty[\subset [u_-, u_+]$ از فاکتور بالایی در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} u_+ &= (1+r)^{\frac{T}{N}} + \lambda_+ \\ u_- &= (1+r)^{\frac{T}{N}} + \lambda_- \end{aligned}$$

اگر $u_\mu \in [u_-, u_+]$ ، $\mu \in [0, 1]$ آنگاه:

$$\begin{aligned} u_\mu &= \mu u_+ + (1-\mu) u_- \\ &= \mu \left((1+r)^{\frac{T}{N}} + \lambda_+ \right) + (1-\mu) \left((1+r)^{\frac{T}{N}} + \lambda_- \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1+r)\frac{T}{N} + [\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2] \\
 &= (1+r)\frac{T}{N} + \lambda^*(\mu)
 \end{aligned}$$

قیمت اختیار معامله به بازه $[\min_{\mu \in [0,1]} C_{\lambda^*}(\mu)(K), \max_{\mu \in [0,1]} C_{\lambda^*}(\mu)(K)]$ تعلق دارد.

فرض کنید نوسانات موثر برای فاکتور بالایی با استفاده از یک مقدار فازی (u_1, u_2, u_3)

$$u_1, u_2, u_3 \in [(1+r)\frac{T}{N}, +\infty[$$

توصیف شده است:

که

$$\begin{aligned}
 u_1 &= (1+r)\frac{T}{N} + \lambda_1 \\
 u_2 &= (1+r)\frac{T}{N} + \lambda_2 \\
 u_3 &= (1+r)\frac{T}{N} + \lambda_3
 \end{aligned}$$

یک برش α ، $\alpha \in [0,1]$ بازه ایست که:

$$\begin{aligned}
 [u_1 + (u_2 - u_1)\alpha, u_2 + (u_3 - u_2)\alpha] = \\
 \left[(1+r)\frac{T}{N} + \lambda_1 + \alpha(\lambda_2 - \lambda_1), (1+r)\frac{T}{N} + \lambda_2 + \alpha(\lambda_3 - \lambda_2) \right]
 \end{aligned}$$

یک عضو این بازه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 &\mu \left[(1+r)\frac{T}{N} + (\lambda_1 + \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)) \right] + (1-\mu) \left[(1+r)\frac{T}{N} + (\lambda_2 + \alpha(\lambda_3 - \lambda_2)) \right] \\
 &= (1+r)\frac{T}{N} + \mu(\lambda_1 + \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)) + (1-\mu)(\lambda_2 + \alpha(\lambda_3 - \lambda_2)) \\
 &= (1+r)\frac{T}{N} + \lambda_\alpha^*(\mu), \quad \mu \in [0,1]
 \end{aligned}$$

برش α ، $\alpha \in [0,1]$ برای قیمت اختیار معامله عبارتست از:

$$[\min_{\mu \in [0,1]} C_{\lambda^*}(\mu)(K), \max_{\mu \in [0,1]} C_{\lambda^*}(\mu)(K)]$$

بدیهی است که برای روشی با بازه‌های مطمئن همانند روشی با به کارگیری مقادیر فازی،

رفتار $C_\lambda(K)$ به عنوان تابعی از u_λ باید مطالعه شود. این موضوع بخش بعدی است.

۴. تعاریف، نشانه‌ها و اختصارات

تابع به اجزایه پایه آن تجزیه می‌شود: ابتدا احتمالات (بالایی و پایینی)، سپس نتایج آنها و در آخر نتایج آنها با فاکتورهای بالایی و پایینی مدنظر قرار می‌گیرند. احتمال بدون ریسک P_λ تابع صعودی u_λ است. برای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ این احتمال یک است و $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} P_\lambda = 0$.

و به ازای $u_\lambda = u^* = (1+r)^{\frac{T}{N}} + \sqrt{(1+r)^{\frac{T}{N}} - 1}$ مقدار $P^* = 0.5$ می‌گیرد.

احتمال $1-P_\lambda$ تابع صعودی u_λ است.

تابع $P_\lambda(1-P_\lambda)$ به ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه می‌شود. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر است.

تابع $u_\lambda p_\lambda$ به ازای $u_\lambda = u^*$ کمینه می‌شود. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ برابر $(1+r)^{T/N}$ است.

تابع $u_\lambda^{-1}(1-P_\lambda)$ به ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه می‌شود. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر است.

می‌توان ثابت کرد: $(u_\lambda p_\lambda)' = \frac{1-p_\lambda}{u_\lambda^2-1} = -\left(u_\lambda^{-1}(1-p_\lambda)\right)'$

رفتار تابعی توابع $C_1(\lambda, j)$ و $C_2(\lambda, j, K)$

در بخش بعد رفتار تابعی هر جمله در جمع (۷) را بررسی خواهیم کرد که شامل دو

بخش $C_1(\lambda, j) = S_\lambda u_\lambda^{j-N} \binom{N}{j} p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j}$ و

$C_2(\lambda, j, K) = -K \binom{N}{j} p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j}$ هستند. این توابع ابتدا جداگانه، صرف نظر از علامت جمع‌شان، بررسی می‌شوند.

مشتق تابع $C_1(\lambda, j)$ نسبت به u_λ ، $u_\lambda \in [(1+r)^{\frac{T}{N}}, +\infty[$ برابر است با:

$$(C_1(\lambda, j))' = \frac{S_\lambda \binom{N}{j}}{u_\lambda} (u_\lambda p_\lambda)^{j-1} (u_\lambda^{-1}(1-p_\lambda))^{N-j-1} (j(1-p_\lambda + u_\lambda^2 p_\lambda) - N u_\lambda^2 p_\lambda) \frac{1-p_\lambda}{u_\lambda^2-1} \quad (6)$$

که نشان می‌دهد:

❖ اگر $j \leq N/2$ آنگاه عبارت $j(1 - p_\lambda + u_\lambda^* p_\lambda) - Nu_\lambda^* p_\lambda$ منفی است و تابع $C_1(\lambda, j)$

به ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه می‌شود. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر است.

❖ اگر $N/2 < j < N$ آنگاه عبارت $j(1 - p_\lambda + u_\lambda^* p_\lambda) - Nu_\lambda^* p_\lambda$

• به ازای تمام مقادیر u_λ منفی است اگر $(1+r)^{T/N} \leq \frac{N}{r\sqrt{(N-j)j}}$ و تابع $C_1(\lambda, j)$ به

ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه می‌شود.

• اگر $(1+r)^{T/N} > \frac{N}{r\sqrt{(N-j)j}}$ و $j = \text{floor}\left(\frac{N}{r} + 1\right)$

○ به ازای $j > \frac{Nu^*}{r(1+r)^{T/N}}$ عبارت منفی است و تابع $C_1(\lambda, j)$ به ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه

می‌شود.

○ به ازای $j \leq \frac{Nu^*}{r(1+r)^{T/N}}$ عبارت دو ریشه دارد:

$$u_1(j) = \frac{N + \sqrt{N^2 - r(N-j)j(1+r)^{\frac{rT}{N}}}}{r(N-j)(1+r)^{\frac{T}{N}}}$$

$$u_r(j) = \frac{N - \sqrt{N^2 - r(N-j)j(1+r)^{\frac{rT}{N}}}}{r(N-j)(1+r)^{\frac{T}{N}}}$$

که $u_1(j) \geq u^* \geq u_r(j) \geq (1+r)^{T/N}$

و اگر $u_1(j) = u_r(j) = u^*$ آنگاه $u_1(j) = u_r(j)$

تابع $C_1(\lambda, j)$ به ازای $u_\lambda = u_2$ و $u_\lambda = u_1$ بیشینه و به ازای $u_\lambda = u^*$ کمینه می‌شود.

• تابع $C_1(\lambda, j)$ به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر می‌شود.

❖ اگر $j = N$ آنگاه تابع برابر $S_1(u_\lambda p_\lambda)^N$ و به ازای $u_\lambda = u^*$ کمینه می‌شود. تابع $C_1(\lambda, j)$ به

ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ برابر $S_1(1+r)^{T/N}$ می‌شود.

مشتق تابع $C_r(\lambda, j, K)$ ، $0 < j < N$ نسبت به u_λ برابر است با:

$$(C_r(\lambda, j, K))' = -K \binom{N}{j} (j - Np_\lambda) p_\lambda^{j-1} (1 - p_\lambda)^{N-j-1} (p_\lambda)' \quad (7)$$

عامل $(j - Np_\lambda)$ دو ریشه به ازای j دارد:

$$u_\lambda^*(j) = \frac{N(1+r)^{T/N} + \sqrt{N^\gamma(1+r)^{\gamma T/N} - \xi j(N-j)}}{\gamma j}$$

$$u_\lambda^*(j) = \frac{N(1+r)^{\frac{T}{N}} - \sqrt{N^\gamma(1+r)^{\frac{\gamma T}{N}} - \xi j(N-j)}}{\gamma j}$$

$$u_\lambda^*(j) < (1+r)^{\frac{T}{N}} \text{ اما}$$

تابع به ازای $u_\lambda = u_\lambda^*(j)$ کمینه می‌شود. اگر $j \leq N/2$ آنگاه $u_\lambda^*(j) > u^*$ و اگر $j \geq N/2$ آنگاه $u_\lambda^*(j) < u^*$ تابع به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر می‌شود. تابع $C_\gamma(\lambda, j, K)$ به ازای $j=0$ نزولی است. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ صفر و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ برابر $-K$ می‌شود. تابع $C_\gamma(\lambda, j, K)$ به ازای $j=N$ صعودی است. به ازای $u_\lambda = (1+r)^{T/N}$ برابر $-K$ و در حد $u_\lambda \rightarrow \infty$ صفر می‌شود.

۵. بررسی جداگانه شاخه‌های درخت دوجمله‌ای

هر جمله در جمع مربوط به یک شاخه در درخت دوجمله‌ای می‌شود. این جمله‌ها وابسته به j و K و تابعی از λ هستند:

$$C_\lambda(j, K) = (S, u_\lambda^{Tj-N} - K) \binom{N}{j} p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j}$$

رفتار تابعی $C_\lambda(j, K)$ صرف نظر از علامتش بررسی شده است. توجه داشته باشید که:

$$C_\lambda(j, K) = C_1(j, K) + C_\gamma(\lambda, j, K)$$

مشتق تابع $C_\lambda(j, K)$ نسبت به u_λ را با توجه به رابطه‌های (۶) و (۷) می‌توان محاسبه کرد:

$$S, \binom{N}{j} (u_\lambda p_\lambda)^{j-1} \left(u_\lambda^{-1} (1-p_\lambda) \right)^{N-j-1} u_\lambda^{-1} \left(j(1-p_\lambda + u_\lambda^r p_\lambda) - Nu_\lambda^r p_\lambda \right) \frac{1-\gamma p_\lambda}{u_\lambda^r - 1} - K \binom{N}{j} (-Np_\lambda) p_\lambda^{j-1} (1-p_\lambda)^{N-j-1} (p_\lambda)'$$

در بازه‌هایی که مشتق‌های (۶) و (۷) هم علامتند و یا به ازای مقادیر u_λ که یکی از مشتق‌ها صفر شود، با توجه به بخش قبل بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که جمله صعودی و یا نزولی است.

از طرف دیگر، با توجه به اینکه رفتار تابعی S, u_λ^{j-N} ضربدر $\binom{N}{j} p_\lambda^j (1 - p_\lambda^{N-j})$ را بررسی کردیم و اینکه جمله می‌تواند در دو گام محاسبه شود (ابتدا K را از S, u_λ^{j-N} کم کرده و سپس نتیجه را در $\binom{N}{j} p_\lambda^j (1 - p_\lambda^{N-j})$ ضرب می‌کنیم)، می‌توانیم درباره رفتار تابعی جمله نتیجه‌گیری کنیم.

این موضوع منجر به نتایج زیر می‌شود:

$$j = 0$$

- $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(\cdot, K) = -K$ و $C_\lambda(\cdot, \cdot) > 0$ و $C_\lambda(\cdot, K) = 0$
- اگر $K \geq S, (1+r)^{-T}$ باشد، آنگاه $C_\lambda(\cdot, K)$ به ازای تمام مقادیر u_λ منفی است.
- اگر $0 < K < S, (1+r)^{-T}$ آنگاه $C_\lambda(\cdot, K)$ یک ریشه، $u^*(\cdot) = \left(\frac{K}{S}\right)^{\frac{1}{N}}$ ، دارد.
- تابع به ازای تمام مقادیر $u_\lambda > u^*(\cdot)$ منفی است و در بازه $[(1+r)^{\frac{T}{N}}, u^*]$ بیشینه می‌شود.
- با افزایش K ، ریشه و بیشینه کاهش می‌یابند.

$$0 < j < \frac{N}{r}$$

- $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(j, K) = 0$ و $C_\lambda(j, \cdot) > 0$ و $C_\lambda(j, K) = 0$
- اگر $K \geq S, (1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ باشد، آنگاه $C_\lambda(j, K)$ به ازای تمام مقادیر u_λ منفی است.
- اگر $K < S, (1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ آنگاه $C_\lambda(j, K)$ یک ریشه، $u^*(j) = \left(\frac{K}{S}\right)^{\frac{1}{j-N}}$ ، دارد. تابع به ازای تمام مقادیر $u_\lambda > u^*(j)$ منفی است و در بازه $[(1+r)^{\frac{T}{N}}, u^*]$ بیشینه می‌شود.
- با افزایش K ، ریشه و بیشینه کاهش می‌یابند.
- از آنجا که تابع همگرا به صفر است، در بازه $[u^*(j), +\infty]$ به یک کمینه می‌رسد.
- $j = \frac{N}{r}$ و j فرد است
- از آنجا که $C_\lambda(j, K) = (S - K) \binom{N}{j} (p_\lambda(1 - p_\lambda))^{\frac{N}{r}}$

- $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(j, K) = 0$ و $C_\lambda(j, K) = 0$
- اگر $S_t > K$ باشد، تابع به ازای تمام مقادیر u_λ مثبت است و اگر $S_t < K$ باشد، تابع به ازای تمام مقادیر u_λ منفی است.
- اگر $S_t > K$ باشد، تابع به ازای $u_\lambda = u^*$ بیشینه و اگر $S_t < K$ باشد، تابع به ازای $u_\lambda = u^*$ کمینه می‌شود.

$$\frac{N}{2} < j < N$$

- $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(j, K) = 0$ و $C_\lambda(j, K) = 0$
- اگر $\frac{N}{2} < j \leq \frac{Nu^*}{r(1+r)^{T/N}}$ و $(1+r)^{T/N} > \frac{N}{r\sqrt{(N-j)j}}$ یا $(1+r)^{T/N} \leq \frac{N}{r\sqrt{(N-j)j}}$ آنگاه:

- اگر $K \leq S_t(1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ ، تابع به ازای تمام مقادیر u_λ مثبت است و به بیشینه‌ای بزرگ‌تر از u^* می‌رسد. بیشینه با افزایش K افزایش می‌یابد.
- اگر $K > S_t(1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ ، تابع یک ریشه، $u^*(j) = \left(\frac{K}{S_t}\right)^{\frac{1}{1-N}}$ دارد. تابع به ازای تمام مقادیر $u_\lambda > u^*(j)$ مثبت است و به بیشینه‌ای بزرگ‌تر از u^* می‌رسد. بیشینه و ریشه با افزایش K افزایش می‌یابند. تابع در بازه بین $(1+r)^{T/N}$ و ریشه، به کمینه‌ای کوچک‌تر از $u^*(j)$ می‌رسد.

$$\frac{Nu^*}{r(1+r)^{T/N}} < j < N \text{ و } (1+r)^{\frac{T}{N}} > \frac{N}{r\sqrt{(N-j)j}}$$

- اگر $K \leq S_t(1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ ، تابع به ازای تمام مقادیر u_λ مثبت است و در $[u_t(j), u^*]$ به بیشینه و کمینه می‌رسد. با افزایش K ، تفاضل بین بیشینه و کمینه ناچیز می‌شود. تابع هم‌چنین به بیشینه‌ای بزرگ‌تر از $u^*(j)$ می‌رسد.
- اگر $K > S_t(1+r)^{\frac{(j-N)T}{N}}$ ، تابع یک ریشه، $u^*(j) = \left(\frac{K}{S_t}\right)^{\frac{1}{1-N}}$ دارد. تابع به ازای تمام مقادیر $u_\lambda < u^*(j)$ منفی است و در بازه بین $(1+r)^{T/N}$ و ریشه، به کمینه‌ای کوچک‌تر از $u^*(j)$ می‌رسد.

$$j = N$$

- $\lim_{u_\lambda \rightarrow \infty} C_\lambda(N, K) = S, (1+r)^T$ و $C_\lambda(N, K) = S, (1+r)^T - K$
- اگر $K \geq S, (1+r)^T$ باشد، آنگاه $C_\lambda(N, K)$ یک ریشه، $u^*(N) = (\frac{K}{S})^{\frac{1}{N}}$ دارد. تابع به ازای تمام مقادیر $u_\lambda > u^*(j)$ مثبت است. با کاهش K ، ریشه نیز کاهش می‌یابد. تابع صعودی است.
- اگر $S, (1+r)^{T-\frac{T}{N}} \leq K < S, (1+r)^T$ آنگاه تابع به ازای تمام مقادیر u_λ مثبت و صعودی است.
- اگر $0 \leq K < S, (1+r)^{T-\frac{T}{N}}$ آنگاه تابع به ازای تمام مقادیر u_λ مثبت است و در بازه $[(1+r)^{\frac{T}{N}}, u^*]$ کمینه می‌شود. با افزایش K ، کمینه کاهش می‌یابد.

روش قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی

فرض کنید K به گونه‌ای است که $C_\lambda(j, K)$ به ازای تمام مقادیر j ، مثبت است. بنابراین قیمت $EC(K, T)$ طبق معادله (۱) برابر است با:

$$\begin{aligned} C_\lambda(K) &= \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^N (S, u_\lambda^{T-j-N} - K) \binom{N}{j} p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j} \\ &= \frac{S,}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^N (u_\lambda p_\lambda)^j (u_\lambda^{-1} (1-p_\lambda))^{N-j} - \frac{K}{(1+r)^T} \sum_{j=0}^N p_\lambda^j (1-p_\lambda)^{N-j} \\ &= \frac{S,}{(1+r)^T} (u_\lambda p_\lambda + u_\lambda^{-1} (1-p_\lambda))^N - \frac{K}{(1+r)^T} = S, - \frac{K}{(1+r)^T} \end{aligned}$$

که در آخرین تساوی (۲) را اعمال کردیم.

این حالت تنها وقتی ممکن است که $K < S, (1+r)^T$ ، زیرا در غیر این صورت جمله‌های به ازای $j < N/2$ در جمع نیستند. اگر این شرایط برای K برقرار شود، آنگاه تمامی جمله‌ها به ازای $j \geq N/2$ در جمع قرار می‌گیرند. بنابراین ما بر روی جمله‌های $j < N/2$ تمرکز می‌کنیم.

عبارت $C_\lambda(j, K)$ به ازای تمام مقادیر $u_\lambda < (\frac{S,}{K})^{\frac{1}{N-j}}$ مثبت است.

کوچکترین ریشه $(\frac{S_0}{K})^{\frac{1}{N}}$ است. اگر $0 < K < S_0(1+r)^{T/N}$ باشد، این ریشه بزرگ‌تر از $(1+r)^{T/N}$ است. در این حالت، اگر $(\frac{S_0}{K})^{\frac{1}{N}} < u_\lambda < (1+r)^{\frac{T}{N}}$ باشد، آنگاه تمام جمله‌ها در جمع هستند و $C_\lambda(K)$ به ازای مقادیری از u_λ که $C_\lambda(K) = S_0(1+r)^{T/N} - K$ ، ثابت است.

$$\left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N}} \leq u_\lambda < \left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N-1}} \quad \text{اگر } u_\lambda \text{ افزایش یابد:}$$

آنگاه $0 < C_\lambda(\cdot, K)$ و جمله مربوطه در جمع نیست. بنابراین:

$$C_\lambda(K) = S_0 - K(1+r)^{-T} - C_\lambda(\cdot, K)(1+r)^{-T}$$

از آنجایی که $C_\lambda(\cdot, K)$ منفی و به ازای $\left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N}} \leq u_\lambda < \left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N-1}}$ نزولی است، $C_\lambda(K)$ برای این مقادیر u_λ صعودی است.

این روش می‌تواند برای تمام مقادیر u_λ و K بسط داده شود.

۶. یافته‌های پژوهش

در آخر، این روش را با یک مثال در حالتی که نوسانات موثر با مقادیر فازی توصیف شده‌اند، نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $0 < K \leq S_0(1+r)^{T/N}$ و

$$\begin{aligned} u_1 &\in](1+r)^{T/N}, \left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N}}[\\ u_r &= \left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N}} \\ u_r &\in]\left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N}}, \left(\frac{S_0}{K}\right)^{\frac{1}{N-1}}[\end{aligned}$$

بنابر این با اعمال (۵)، برش‌های α قیمت اختیار معامله برابر است با:

$$\left[S_0 - \frac{K}{(1+r)^T}, S_0 - \frac{K}{(1+r)^T} - \frac{C_{\lambda_{\alpha}(\cdot)}(\cdot, K)}{(1+r)^T} \right]$$

۷. نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در مدل پیوسته بلک شولز، که یک نسخه زمان گسسته از درخت دو جمله‌ای است، قیمت اختیار خرید اروپایی یک تابع اکیدا صعودی از نوسانات است. زیرا پارامتر متوقف کننده مانند مشتق قیمت نسبت به نوسانات، اکیدا مثبت است.

ما در حالت گسسته، رفتار تابعی قیمت را برای مدل‌سازی عدم قطعیت در نوسانات بررسی کردیم، می‌توانیم نتیجه بگیریم که در مدل درخت دو جمله‌ای، قیمت لزوماً یک تابع اکیدا صعودی از نوسانات نیست.

به عنوان تحقیقات آتی می‌توان رفتار تابعی را هنگامی که این مدل زمان گسسته به مدل بلک شولز همگرا می‌شود، بررسی کرد.

منابع

- سلامی، ا.، (۱۳۸۲). مروری بر شبیه سازی مونت کارلو. پژوهشنامه اقتصادی، بهار ۱۳۸۲، دوره ۳ شماره ۱ (پیاپی ۸)؛ از صفحه ۱۱۷ تا صفحه ۱۳۸.
- سیاح، س.، و صالح آبادی، ع.، (۱۳۸۸). مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، تهران: شرکت کارگذاری مفید.
- کیمیاگری، م.، و آفریده ثانی، ا.، (۱۳۸۷). ارائه یک روش تلفیقی جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله مبتنی بر دو مدل بلک شولز و درخت دوتایی. نشریه بین المللی مهندسی صنایع و مدیریت تولید دانشگاه علم و صنعت، ج ۱۹ (۴)، ۱۱۹-۱۲۷.
- F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. (1973). Journal of Political Economics, 7:637-659.
- C. Cox and M. Rubinstein. Option pricing: A Simplified Approach. (1979). Journal of Financial Economics, 81:229-263.
- M. Guerra and L. Sorini and L. Stefanini (2011). Option Price Sensitivities Through Fuzzy Numbers. Computers & Mathematics with Applications. Volume 61, Issue 3, February 2011, Pages 515-526.
- E. Kerre. (1998) Fuzzy Sets and Approximate Reasoning. Xian Jiaotong University Press, pp 254.
- S. Muzzioli and C. Torricelli. A Multiperiod Binomial Model for Pricing Options in an Uncertain World. (2001). Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, 255-264.
- H. Reynaerts and M. Vanmaele. (2003). A Sensitivity Analysis for the Pricing of European Call Options in a Binary Tree Model.
- Thavaneswaran and S.S. Appadoo and J. Frank. Binary Option Pricing Using Fuzzy Numbers. (2013). Applied Mathematics Letters. Volume 26, Issue 1, January 2013, Pages 65-72.
- http://www.aftabir.com/business/financial/stock/iran/value_math.php
- <http://www.bmibourse.com/168>